

CVOFLS 方法在多涡剪切流场问题中的应用

崔立营^[1] 杨英歌^[2]

(1. 西安欧亚学院, 陕西 西安 710065;

2. 西安北方光电股份有限公司, 陕西 西安 710043)

摘 要 CVOFLS 方法 (Coupled Volume of Fluid and Level Set method) 继承了 VOF 和 Level Set 两种方法的优点, 以 VOF 函数为主体模拟流体运动界面, 通过 Level Set 函数校正界面法向, 从而有效克服两种方法的不足。多涡剪切流场数值模拟算例表明, 该方法能保证较好的运动界面模拟精度以及较高的计算效率。

关键词 运动界面 CVOFLS 模拟精度

中图分类号: O24

文献标识码: A

文章编号: 1007-0745(2022)01-0001-03

现实生活中很多现象与运动界面密切相关, 如水滴下落、气体爆炸等问题^[1], 因此, 研究运动界面的数值模拟具有深远意义。在欧拉方法中, Level Set 方法^[2]和 VOF 方法^[3]因其内存占用小, 易解决结构复杂的流体运动界面问题以及实现简单等优点而被广泛采用。基于此, 有学者提出了耦合两类方法优点的 CLSVOF 方法。

孙东亮等^[4]于 2010 年给出了一种新的 CLSVOF 方法, 该方法虽然简化了原始的 CLSVOF 方法, 但其方法理论以及重构界面的过程比较复杂。李强等^[5]于 2011 年创造了一种全新的 CLSVOF 方法。该方法自带质量校正公式, 并且计算自由运动界面精度很好, 但其计算效率不高。

Level Set 方法在模拟运动界面方面会计算得到更为准确界面法向和曲率, 又考虑到 VOF 方法具有计算效率高以及质量守恒性好的优点和界面法向与曲率较差的缺点; 因此, 若将 Level Set 方法耦合到 VOF 方法中, 便可克服其缺陷。本文采用了耦合 Level Set 与 VOF 的新方法—CVOFLS 方法^[6], 并通过对多涡剪切流场问题的模拟, 验证了 CVOFLS 方法效率更高, 界面守恒性更好。

1 输运方程

CVOFLS 方法是一种新的耦合 VOF 与 Level Set 方法。运动介质的速度场为 $u(u, v)$, Level Set 函数 $\phi(X, t)$ 以及 VOF 函数 $F(X, t)$ 所满足的输运方程表达式分别如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (2)$$

CVOFLS 方法中采用周文等^[7]的数值方法对方程

(1) 和 (2) 进行离散。

Level Set 函数的运算过程中需对函数 $\phi(X, t)$ 进行重新初始化, 进而获得新的点 X 到界面 $\Gamma(t)$ 的符号距离函数; 该方法可以保证 Level Set 函数的数值稳定性, 并使得其在求解域内具有优良的光滑性。

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \text{sign}(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|) \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3)$$

对方程 (3) 进行离散得到的稳态解来重新初始化符号距离函数。其中 τ 是伪时间, 使用 $\text{sign}(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + [\min(\Delta x, \Delta y)]^2}}$ 近似计算 $\text{sign}(\phi_0)$, Δx 、 Δy 为离散坐标下的 x 轴与 y 轴的空间步长。

2 数值方法

2.1 VOF 输运方程的离散

为了计算方便, 方程 (2) 可写为守恒形式:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} F) = F \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4)$$

Sussman 和 Puckett^[8]提出用通量分裂算法来求解方程 (4), 其离散形式如下:

$$F_{i,j}^{(n+1)} = \hat{F}_{i,j} - \Delta t \left(\tilde{F}_{i,j} \cdot \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n)}}{\Delta x} + F_{i,j} \cdot \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n)} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n)}}{\Delta y} \right)$$

其中:

$$\tilde{F}_{i,j} = \frac{F_{i,j}^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} \cdot u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{(n)} \cdot u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n)} \right)}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n)} \right)}$$

★基金项目: 西安欧亚学院校级科研基金项目 (编号: 2021XJZK03)。

$$\hat{F}_{i,j} = \frac{\tilde{F}_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n)} - \tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot v_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n)} \right)}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n)} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n)} \right)}$$

2.2 Level Set 输运及重新初始化方程的离散

2.2.1 空间离散

方程(1)和方程(3)同属于 Hamilton-Jacobi 型方程。

其中 Level Set 函数方程(1)可写为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

其在 Hamilton-Jacobi 型方程中:

$$H(\phi_x, \phi_y) = u\phi_x + v\phi_y$$

对应的通量为:

$$\hat{H}(\phi_x^+, \phi_x^-, \phi_y^+, \phi_y^-) = u \frac{\phi_x^+ + \phi_x^-}{2} + v \frac{\phi_y^+ + \phi_y^-}{2} - \frac{1}{2} \alpha (\phi_x^+ - \phi_x^-) - \frac{1}{2} \beta (\phi_y^+ - \phi_y^-)$$

$$\text{其中 } \alpha = \max |H_{\phi_x}(\phi_x, \phi_y)| = \max |u|, \quad \beta = \max |H_{\phi_y}(\phi_x, \phi_y)| = \max |v|。$$

其中, 方程(3)可写为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + [\min(\Delta x, \Delta y)]^2}} (\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} - 1) = 0$$

其 Hamilton-Jacobi 型方程中:

$$H(\phi_x, \phi_y) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + [\min(\Delta x, \Delta y)]^2}} (\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} - 1)$$

对应的通量为:

$$\hat{H}(\phi_x^+, \phi_x^-, \phi_y^+, \phi_y^-) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + [\min(\Delta x, \Delta y)]^2}} \left(\sqrt{\left(\frac{\phi_x^+ + \phi_x^-}{2} \right)^2 + \left(\frac{\phi_y^+ + \phi_y^-}{2} \right)^2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \alpha (\phi_x^+ - \phi_x^-) - \frac{1}{2} \beta (\phi_y^+ - \phi_y^-)$$

其中:

$$\alpha = \max |H_{\phi_x}(\phi_x, \phi_y)| = \max \left| \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + [\min(\Delta x, \Delta y)]^2}} \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right|$$

$$\beta = \max |H_{\phi_y}(\phi_x, \phi_y)| = \max \left| \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + [\min(\Delta x, \Delta y)]^2}} \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right|$$

Jiang 和 Peng^[9]专门针对 Hamilton-Jacobi 型方程求解, 给出了经典的五阶 WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) 格式。故本文空间离散采用该格式, 进而可得该方程的离散形式^[10]:

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \Delta t \left(u_{i,j} \frac{\phi_{x,i,j}^+ + \phi_{x,i,j}^-}{2} + v_{i,j} \frac{\phi_{y,i,j}^+ + \phi_{y,i,j}^-}{2} \right) - \Delta t \left(-\frac{1}{2} |u_{i,j}| (\phi_{x,i,j}^+ - \phi_{x,i,j}^-) - \frac{1}{2} |v_{i,j}| (\phi_{y,i,j}^+ - \phi_{y,i,j}^-) \right)$$

其中文献[8]给出了 ϕ_x^+ , ϕ_y^+ , $\phi_{x,i,j}^+$, $\phi_{y,i,j}^+$ 的表达式及详细推导过程, 文献[9]提供了详细的方程(3)的离散形式。

2.2.2 时间项离散

采用三阶 TVD-R-K (Total Variation Diminishing Runge-Kutta) 格式对方程(1)、(3)进行离散, 可以有效避免数值振荡, 其表达式为:

$$\phi^{(1)} = \phi^{(0)} + \Delta t (\phi^{(0)})$$

$$\phi^{(2)} = \phi^{(1)} + \frac{\Delta t}{4} (-3L(\phi^{(0)}) + L(\phi^{(1)}))$$

$$\phi^{(3)} = \phi^{(2)} + \frac{\Delta t}{12} (-L(\phi^{(0)}) - L(\phi^{(1)}) + 8L(\phi^{(2)}))$$

其中 $\phi^{(0)} = \phi^n$, $\phi^{(3)} = \phi^{n+1}$ 。对于 Level Set 方程(1), $L(\phi) = u\phi_x + v\phi_y$; 对于重新初始化方程(3), $L(\phi) = \text{sign}(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|)$ 。

3 数值算例

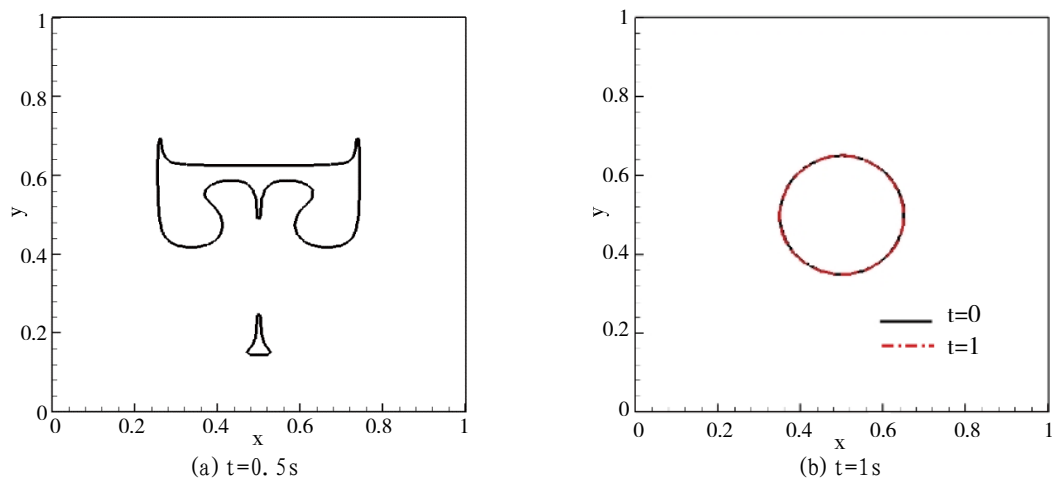
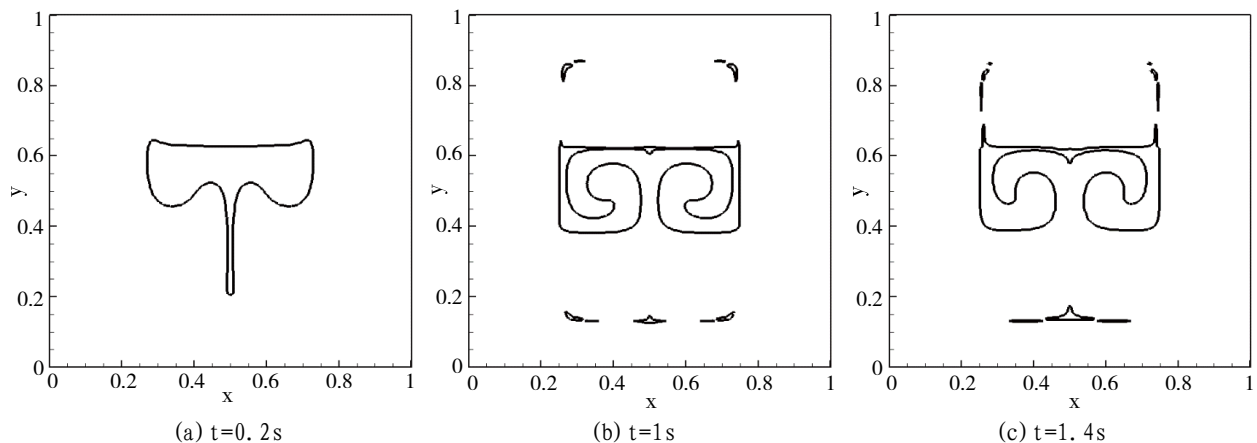
为了验证本文提出的 CVOFLS 方法的有效性, 下面以模拟多涡剪切流场的界面运动为例, 检验 CVOFLS 方法的模拟效果, 即考察圆心在 (0.5, 0.5)、半径为 0.15 的圆在速度场中的运动情况, 整个流场计算区域为 [0,1] × [0,1], 时间步长为 0.002s。

$$u = \sin(4\pi(x+0.5)) \sin(4\pi(y+0.5)) \cos(\pi t / T)$$

$$v = \cos(4\pi(x+0.5)) \cos(4\pi(y+0.5)) \cos(\pi t / T)$$

其中 t 为模拟时间, T 为多涡剪切流场的周期。

图 1、图 2 分别给出了周期 T=1s 和 T=2s 时采用 CVOFLS 方法模拟多涡剪切流场的数值结果。由图可知, CVOFLS 方法在 T=1s 时模拟的数值结果与初始时刻的结果基本重合, 表明其具有很好的稳定性及守恒性。而在 T=2s 时模拟的数值结果效果良好, 具有较好的守恒性。

图 1 多涡剪切流场的模拟结果 ($T=1s$)图 2 多涡剪切流场的模拟结果 ($T=2s$)

4 结论

数值结果表明: CVOFLS 方法对多涡剪切流场的数值模拟效果良好, 其数值结果验证了 CVOFLS 方法的准确性, 同时表明该方法在数值界面模拟方面, 具有更高的计算效率以及更好的界面模拟精度。

参考文献:

- [1] 刘儒勋, 王志峰. 运动界面追踪与数值方法 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001.
- [2] Osher S., Sethian J.A. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(01):12-49.
- [3] Sethian J.A. Fast marching methods[J]. SIAM Review, 1999, 41(02):199-235.
- [4] D.L. Sun, W.Q. Tao. A coupled volume-of-fluid and level set (VOSET) method for computing incompressible

two-phase flows[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2010, 53(04):645-655.

- [5] Li Qiang, Ouyang J, Yang Bingxin, et al. Numerical simulation of gas-assisted injection molding using CLSVOF method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(01):257-275.

[6] 周文, 欧阳洁, 崔立营. 运动界面追踪的 CVOFLS 方法 [J]. 工程数学学报, 2015, 32(05):697-708.

[7] 同 [6].

- [8] G.Son, N.Hur. A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Buoyancy-Driven Motion of Fluid Particles[J]. Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals, 2002, 42(06):523-542.

[9] Jiang G S, Peng D. WENO Schemes for Hamilton-Jacobi Equations[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000, 21(06):2126-2143.

- [10] G.Son, N. Hur. A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Buoyancy-Driven Motion of Fluid Particles[J]. Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals, 2002, 42(06):523-542.