

# 基于微分方程的交叉路口信号灯 闪亮时间的数学模型研究

——以武汉市为例

刘 炜\*, 孔德山

(湖北警官学院, 湖北 武汉 430034)

**摘要** 我国城市化进程不断加快, 交通拥堵问题日益严重, 尤其在交叉口等交通枢纽, 信号灯配时直接影响通行效率。现有信号灯控制策略, 特别是黄灯闪烁时间和红绿灯配时方案, 存在不合理现象, 导致交通流量分配不均, 事故频发, 效率低下。本文基于微分方程理论, 提出黄灯闪烁时间和红绿灯配时优化模型, 分析并解决信号灯控制中的问题, 通过对武汉市典型交叉口交通流数据进行计算, 验证了模型的有效性和可行性。研究表明, 优化后的配时方案能提高通行效率, 减少等待时间, 降低事故风险, 为城市交通管理提供新的优化思路。本文旨在为城市交通智能化和精细化管理提供理论依据, 并对交通信号控制的未来发展具有积极的意义。

**关键词** 微分方程; 交叉路口; 信号灯

**基金项目:** 湖北警官学院院级科研项目资助, 微分方程模型在公安交通管理中的应用研究(项目编号: HJ2024QN05); 湖北警官学院院级科研项目资助, 光学原理在公安交通安全管理中的应用研究(项目编号: HJ2024YB10)。

**中图分类号:** U491

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.3969/j.issn.2097-3365.2025.02.005

## 0 引言

随着现代城市化进程的推进, 城市交通拥堵问题日益严峻, 特别是在交通枢纽的交叉口, 通行效率直接影响城市交通网络的流畅性。交叉口信号灯的设计和控制策略是交通管理中的关键因素。合理的信号灯配时可以有效缓解交通压力, 提高通行能力, 减少等待时间。然而, 许多交叉口的信号灯配时方案仍采用固定设置, 未考虑交通流量的波动和不同时间段的需求, 导致通行效率低下, 事故频发, 甚至加剧交通拥堵。在传统信号控制中, 黄灯闪烁时间通常是固定设置, 未根据交通流量的变化进行动态调整, 这种做法在高峰时段可能造成不必要的交通延误, 降低交叉口通行能力, 科学合理地调整黄灯闪烁时间成为关键问题。此外, 红绿灯配时方案也面临优化需求。传统的配时方式不能有效应对高峰时段的交通流量波动, 导致高峰期无法有效疏导交通。本文提出基于微分方程的优化模型, 分析武汉市典型交叉口的交通流数据, 探索动态调整信号灯配时的方案, 旨在为提高交叉口的通

行能力、改善交通状况提供借鉴。

## 1 问题提出

在城市交通管理中, 信号灯的设计和配时策略直接影响着道路交通的流畅性和安全性。黄灯作为红绿灯的过渡信号, 旨在给驾驶员提供足够的反应时间, 以避免红灯亮起时的紧急制动所引发的追尾事故。然而, 现有的许多交叉口的黄灯闪烁时间设置过于机械化, 未能考虑不同时间段、不同交通流量下的交通特点, 造成了交通流的低效运行, 甚至增加了交通事故的风险。尤其是在高峰时段, 许多交叉口的黄灯时间设置过长, 不仅影响了交通流的顺畅, 还导致了大量车辆在红灯亮起前的等待时间, 降低了交叉口的通行效率<sup>[1]</sup>。

红绿灯配时, 即绿灯、红灯时间的分配, 通常是根据交叉口的交通流量、车辆类型等因素来设置的。然而, 许多交叉口仍采用固定的信号灯配时方案, 无法根据实时交通流量进行动态调整, 导致在交通高峰期车辆等待时间过长, 交叉口的通行能力大幅降低。这种固定的配时方式不适应复杂和多变的交通需求,

\*本文通信作者, E-mail: 505730188@qq.com。

容易导致车辆拥堵、排队现象严重,增加了交通事故发生的概率<sup>[2]</sup>。因此,交通管理部门亟需采用更加灵活和智能的配时策略,以提高交通流的整体效率和安全性。

此外,不同交叉口的交通需求差异较大,有的交叉口车流量较大,而有的交叉口则可能存在较为平稳的交通流量。为了提高交叉口的通行效率,需要根据实际的交通情况,动态调整红绿灯配时方案,以更好地适应交通流的变化。传统的交通信号配时方法往往难以应对这种变化,导致交通资源无法得到最优配置,进一步加剧了交通拥堵。为了解决这一问题,交通信号灯的智能化调整已成为研究热点之一<sup>[3]</sup>。

微分方程作为一种数学工具,具有描述连续变化现象的优势,广泛应用于交通流的建模与分析。通过微分方程建模,可以准确地反映交叉口交通流的变化趋势,合理预测不同信号灯配时下的交通流状况,为优化信号灯配时提供理论依据。

此外,随着大数据和人工智能技术的发展,基于实时交通数据的动态优化模型也得到了广泛应用,进一步提升了交通信号灯配时的精准性和智能化水平<sup>[4]</sup>。

因此,基于微分方程的信号灯配时优化模型,不仅能够改善交叉口的通行效率,还能有效降低交通事故的发生率,促进城市交通的可持续发展。

本研究通过建立黄灯闪烁时间与红绿灯配时优化的数学模型,探索一种基于交通流量变化的动态优化方法。以武汉市为例,通过实际数据验证该模型的有效性,旨在为城市交叉口的信号灯优化提供新的思路 and 方案,并为其他城市的交通管理改革提供参考依据。

## 2 模型建立

### 2.1 模型一:黄灯闪烁时间模型

交叉路口黄色信号灯的数学模型如下:

假设黄灯闪亮时间为 $T$ ,则 $T=T_1+T_2+T_3$ ,其中 $T_1$ 为驾驶员看到黄灯后的反应时间; $T_2$ 为距停车线的刹车时间; $T_3$ 为通过十字路口的时间。

在假设车辆长度一致,道路无维修、事故、违章等状况,不考虑天气、人流等对汽车行驶状况的影响下,令 $m$ 为汽车质量, $f$ 为摩擦系数, $x$ 表示行驶距离,因此刹车制动力为 $fmg$ ,根据加速度公式,有黄灯闪亮时间模型:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -fmg$$

此方程初始条件是 $x(0)=0, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$ 。

假设道路交叉口长度为 $L$ ,假设车身长度为 $I$ ,则汽车通过路口的时间 $T_3 = \frac{I+L}{v_0}$ ,黄灯闪烁时间理论上应为 $T=T_1+T_2+T_3=T_1+\frac{v_0}{2a}+\frac{I+L}{v_0}$ ,其中, $a$ 表示当在停车线前汽车开始减速时的减速度。

为了提高路口黄灯效率,我们考虑左拐车辆只要在对向直行车辆到达冲突点之前通过冲突点即可,并考虑在模型中把初始速度设定为常数 $v_0$ 不合实际,因此,假设汽车驶入路口的速度 $v \sim U(v_0 - \frac{\Delta v}{2}, v_0 + \frac{\Delta v}{2})$ ,则 $T = \frac{1}{\Delta v} \int_{v_0 - \frac{\Delta v}{2}}^{v_0 + \frac{\Delta v}{2}} T(x) dx$ 。

最后综合修改,可以得到黄灯闪烁时间模型为:

$$T = T_1 + \frac{v_0}{2a} - (T_1 + \sqrt{\frac{2L}{a}}) + \frac{I + (L - L_1)}{v_0} \ln \frac{2v_0 + \Delta v}{2v_0 - \Delta v} \quad (1)$$

### 2.2 模型二:红绿灯时间优化模型

车辆在到达一个交叉口遇到拥堵时,据统计,司机在平均等待300s左右的时间时会出现厌倦情绪。因此,当第一辆车到达路口时,假设后面有 $n$ 辆车,那么第 $n$ 辆车如果能在300s内通过路口即交叉口交通相对通畅<sup>[5]</sup>。

设第 $n$ 辆车车头与信号灯距离为 $S$ ,那么 $S=(n-1)(I+l)$ ,其中 $l$ 表示两车之间的最小车距。

首先需要统计等待红绿灯的车辆数,通过超声波回声定位法和测速仪测量车辆速度,假设测速仪测量结果为 $v_0$ ,在交叉口安装超声波设备,在无车辆通过时超声波的往返时间为 $t_0$ ,当有车辆经过时往返时间会缩小,结合时间差可以计算出车辆长度 $I=v_0 t_0$ ,可以利用以下程序统计某车道上的车辆数。

```
#include<stdio.h>
int main() {
    double t,t0=*; // 假设 t0 为无车时的超声波往返时间
    int j = 0; // 初始化车辆计数器
    // 假设 t0 已经通过某种方式被设置为无车时的超声波往返时间
    for ( int i = 0; ; i++ ) {
        scanf ( "%lf", &t); // 读取当前超声波往返时间
        if ( t < t0 ) {
            j++; // 如果时间小于 t0, 则认为有车辆经过
        }
        printf ( "%f\n", t); // 打印当前时间
```

```
// 这里可能需要添加退出循环的条件
}
return 0;
}
```

接下来用微分方程求最小车距, 假设前车位置  $x_{n-1}(t)$ , 后车位置  $x_n(t)$ , 前后车速度差忽略, 司机反应时间  $T_1$ , 停车后应保持车距  $l'$ , 则可得等式:

$$x_n(t) - x_{n-1}(t) = T \cdot \frac{dx_n(t)}{dt} + l'$$

两边同时求导得:

$$\frac{dx_n(t)}{dt} - \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = T \cdot \frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = v(t)$$

综上, 得到最小车距  $l_0 = v(t) + l'$ 。

假设在 300 s 的等待时间中, 红绿灯信号改变了  $k$  次, 每次红灯时间为  $t_{\text{红}}$ , 黄灯闪烁时间为  $t_{\text{黄}}$ , 则  $S_0 = v(t) [300 - \frac{(k+1)}{2} t_{\text{红}} - kt_{\text{黄}}]$ , 即在实际中可根据车速计算出  $S_0$  和车辆数  $N_0$ , 当车道上滞留车流长度大于  $S_0$  或等待车辆数大于  $N_0$  时, 则应减少红灯时间或增加绿灯时间, 以此疏通交通。

### 3 数值计算

#### 3.1 模型一

根据研究和统计数据, 驾驶员典型的反应时间在 1~2 s, 此处假设  $T_1$  为 2 s, 沥青路面摩擦系数为 0.5~0.9 之间, 此处假设 0.7, 车长平均 5 m, 武汉市机动车经过城市道路交叉口的平均速度为 20 km/h (即 5.56 m/s), 武汉市关山大道与南湖大道道路交叉口单向 30 m。根据公式 (1) 代入以上数据, 得黄灯闪烁时间为 5.5 s, 而实际变化过程中闪烁时间只有 3 s, 应根据时间情况适当延长。

#### 3.2 模型二

根据观测显示, 武汉市关山大道与南湖大道道路交叉口东西向长度 30 m, 车长和机动车平均速度假设与模型一相同, 则根据模型二结果计算最小车距, 最后得到  $S_0 = 161$  m 和  $N_0 = 23$ 。在实际上下班高峰期, 该向车道滞留车辆平均约为 28 辆, 故应适当延长绿灯时间, 与其他交叉口进行统一协调调度<sup>[6]</sup>。

### 4 结论

本文基于微分方程的思想, 深入探讨了交叉口信号灯控制中的黄灯闪烁时间与红绿灯配时优化问题, 提出了两种优化模型, 旨在提高交通流效率, 减少事

故风险, 并为智能交通管理提供理论支持。

第一个模型通过分析交通流量与黄灯时间的关系, 提出了动态调整黄灯闪烁时间的优化方案, 能够根据实时流量的变化和交通密度的波动, 合理地调整黄灯闪烁时间, 从而避免了传统静态配时方法带来的过度等待或不必要的延误。

第二个模型进一步考虑了红绿灯配时与车辆速度、交通流量的关系, 提出了基于实时流量监测的优化方法, 通过获取实时交通数据来动态调整信号灯配时, 以最大化通行能力并有效降低交叉口的拥堵情况。为了验证模型的实际效果, 研究以武汉市典型交叉口的交通数据为基础, 进行了数值模拟计算, 验证了模型在高峰时段和不同交通条件下的有效性。

研究表明, 基于微分方程的优化方法能够有效提高交叉口通行能力, 减少等待时间, 降低事故发生率, 提高交通效率, 该优化方案还为城市交通管理提供了科学、灵活的决策支持, 能够根据实时交通数据做出及时的调整, 保障交通安全并减少资源浪费。尽管本研究取得了一定进展, 但模型中仍有改进空间, 未来研究可进一步优化车辆速度估算与检测精度, 考虑更多实际因素, 如道路条件与天气。同时, 随着人工智能和机器学习的发展, 结合智能算法的信号灯优化方法将实现更精确的控制, 并能够通过自学习不断优化配时策略。

### 参考文献:

- [1] Wu, J., Li, X., & Zheng, L. Optimization of traffic signal timing based on traffic flow model[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2020, 1-9.
- [2] Xie, K., & Qian, Z. Dynamic traffic signal optimization based on real-time traffic data[J]. Journal of Advanced Transportation, 2021, 1-14.
- [3] 陈宇, 王凯, 刘畅等. 基于微分方程的交通信号灯配时优化模型研究[J]. 交通运输工程学报, 2020, 20(03):75-83.
- [4] 张雷, 王欣, 刘伟. 基于交通流量的智能交通信号灯控制方法[J]. 智能交通系统, 2021, 15(04):45-52.
- [5] 李四光, 张强, 吴江. 高峰时段交通信号灯配时优化方法研究[J]. 公路交通科技, 2022, 39(05):120-127.
- [6] 黄建华, 陈浩, 邓小锋. 基于车流量和等待时间的交通信号优化方法[J]. 交通信息与控制, 2019, 17(06):95-102.