

函数插值分析研究与应用

郭佳欣

(北京建筑大学, 北京 102616)

摘要 在研究 $f(x)$ 时, 它的表达形式是多变的, 由于问题的复杂性, 直接研究函数 $f(x)$ 可能很困难, 面对这种情况, 首先想到的是如何将表达式简单化, 因此, 构造某个简单函数 $p(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数, 然后通过处理 $p(x)$ 获得关于 $f(x)$ 的结果, 这样即可获得简单的表达式。若近似函数 $p(x)$ 取给定的离散数据, 则 $f(x)$ 被称为插值函数。本文对常见的几种插值方法——lagrange插值、newton插值、hermite插值方法的基本思想、插值函数的构造等进行了详细的介绍, 并通过实验案例学习用插值方法解决实际问题; 掌握用matlab计算拉格朗日、分段线性、保形、三次样条插值的方法, 改变节点的数目, 对几种插值结果进行初步分析。

关键词 插值基函数; 插值多项式; 插值节点; matlab

中图分类号: O174

文献标识码: A

文章编号: 1007-0745(2023)02-0088-03

实际问题中经常有这样的函数 $y=f(x)$, 其在某个区间 $[a, b]$ 上有有限个离散点 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 且这些点对应函数值为 $y_i=f(x_i)(i=0, 1, 2, \dots)$, 若想得到其它点的值就必须找一个满足上述条件的函数表达式。

1 Lagrange 插值函数

1. 求作 n 次多项式 $p_n(x)$, 使满足条件:

$$p_n(x_i)=y_i, i=0, 1, \dots, n$$

这就是所谓的拉格朗日(Lagrange)插值。点 x_i (它们互不相同)称为插值节点。用几何语言来表达这类差值, 就是通过曲线 $y=f(x)$ 上给定的 $n+1$ 个点 $(x_i, y_i)(i=0, 1, \dots, n)$, 求作一条 n 次代数曲线 $y=p_n(x)$ 作为 $y=f(x)$ 的近似。

2. 拉格朗日插值公式。

(1) 首先考察线性插值的简单情形。若 $y=f(x)$ 表示过两点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 的直线, 这个问题是我们所熟悉的, 它的解可表示为对称式:

$$y = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$$

此类为一次插值, 称为线性插值。若令:

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

由此可得: $l_0(x_0)=1, l_1(x_0)=0, l_1(x_1)=1, l_0(x_1)=0$, 则有: $p_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$, 这里的 $l_0(x), l_1(x)$ 可以看作是满足条件 $l_0(x_0)=1, l_0(x_1)=0$ 的插值多项式, 这两个特殊的插值多项 $l_1(x_1)=1, l_1(x_0)=0$

式称作上述问题的插值基函数^[1-2]。

(2) 抛物插值。线性插值仅仅利用了两个节点的

信息, 精度自然很低, 为了提高精度, 进一步考察二次插值。若 $y=f(x)$ 表示过三点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的曲线, 求它的解。二次插值的几何解释是, 用通过三点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的抛物线 $y=p_2(x)$ 来近似所考察的曲线 $y=f(x)$, 因此这类插值亦称为抛物插值。

根据上述解决方法, 同理可以得出:

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

容易看出, 这样构造的 $p_2(x)$ 为问题的解。

(3) 推广到一般: 已知函数在 $n+1$ 个不同点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的函数值分别为 $y_0, y_1, \dots, y_n$ 求一个次数不超过 n 的多项式 $p_n(x)$, 使其满足: $p_n(x_i)=y_i(i=0, 1, \dots, n)$ 即 $n+1$ 个不同的点可以决定的一个 n 次多项式。过 $n+1$ 个不同的点分别决定 $n+1$ 个 n 次插值基函数。 $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 每个插值基多项式满足: a. $l_i(x)$ 是 n 次多项式; b. $l_i(x_i)=1$, 而在其它 n 个点 $l_i(x_k)=0, (k \neq i)$ 。由于 $l_i(x_k)=0, (k \neq i)$, 故有因子 $(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)$ 因其已经是 n 次多项式, 故而仅相差一个常数因子。令 $l_i(x)=a_i(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)$ 由 $l_i(x_i)=1$, 可以定出 a_i , 进而得到:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$$

则 n 次拉格朗日型插值多项式 $p_n(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+\dots+y_n l_n(x)$, 从而 $p_n(x)$ 是一个次数不超过 n 的多项式, 且满足 $p_n(x_i)=y_i(i=0, 1, \dots, n)$ ^[3-5]。

2 Newton 插值函数

2.1 Newton 法的简述

设 $(x-x_k)$ 是 $f(x)$ 的一个近似根, 把 $f(x)$ 在 x_k 处泰勒展开:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x)(x-x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x-x_k)^2 + \dots$$

若取前两项来近似代替 $f(x)$, 则 $f(x)=0$ 的近似方程为 $f(x) \approx f(x_k) + f'(x)(x-x_k) = 0$ 。设 $f'(x) \neq 0$, 设其根为 x_{k+1} , 则 x_{k+1} 的计算公式为:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} (k=0, 1, 2, \dots)$$

这即为牛顿法, 其迭代函数为:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

牛顿法其实是一种逐步的线性化的方法, 它的本质是将 $f(x)=0$ 非线性方程的求根问题归结为类似的一系列线性方程 $f(x_k) + f'(x)(x-x_k) = 0$ 的根。

2.2 具有承袭性的插值公式

先考察线性插值的插值公式:

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

由于 $p_0(x) = f(x_0)$ 可看作是零次插值多项式, 上式表明 $p_1(x) = p_0(x) + c_1(x-x_0)$ 其中, 修正项的系数:

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

再修正 $p_1(x)$ 以进一步得到抛物插值公式的解 $p_2(x)$, 为此, 令:

$$p_2(x) = p_1(x) + c_2(x-x_0)(x-x_1)$$

显然, 不管系数 c_2 如何取值, $p_2(x)$ 均能满足两个条件: $p_2(x_0) = f(x_0), p_2(x_1) = f(x_1)$, 再用剩下的一个条件 $p_2(x_2) = f(x_2)$ 来确定 c_2 , 结果有:

$$c_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

记 $c_0 = f(x_0)$, 从而有: $p_2(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1)$

以上论述表明, 为了建立具有承袭性的插值公式, 需要引进差商并研究其性质。

2.3 差商及其性质

对于给定的函数 $f(x)$, 记 $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ 表示关于节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的 n 阶差商。一阶差商定义为:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

二阶差商定义为一阶差商的差商:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

一般地, n 阶差商递推定义为:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

为统一起见, 补充定义函数 $f(x_i)$ 为零阶差商。

一般地, 用数学归纳法易证:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)}$$

2.4 差商形式的插值形式

$$p_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

这种差商形式的插值公式称作牛顿插值公式, 牛顿公式其实只是拉格朗日公式的一种变形^[6-7]。

3 Hermite 插值法

1. 在某些问题中, 为了保证插值函数能更好与原来的函数重合, 使插值函数更接近原来函数轨迹, 不但要求“过点”, 即两者在节点上具有相同的函数值, 而且要求“相切”, 即在节点上还具有相同的导数值, 这类插值称作切触插值, 或称埃尔米特 (Hermite) 插值。显然, 埃尔米特插值是泰勒插值和拉格朗日插值的综合和推广。

2. Hermite 插值基本原理。通常如上条件的 Hermite 型插值是通过构造相应的插值基函数来完成的, 为方便起见, 以 $n=1$ 为例, 说明传统的求解方法, 设给定的 x_0, x_1 和相应的函数值 $f(x_0), f(x_1)$ 及微商值 $f'(x_0), f'(x_1)$ 构造插值函数 $H_3(x)$ 。由构造函数的办法可知: 对应于 x_0 和 x_1 点函数值的插值函数分别为:

$$h_0(x) = (1 + 2 \frac{x-x_0}{x_1-x_0})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$

$$h_1(x) = (1 + 2 \frac{x-x_1}{x_0-x_1})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

而对应的 x_0 和 x_1 点导数值的插值基函数分别为:

$$H_0(x) = (x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$

$$H_1(x) = (x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

因此所要求的插值函数 $H_3(x) = f(x_0)h_0(x) + f(x_1)h_1(x) + f'(x_0)H_0(x) + f'(x_1)H_1(x)$ 。

表1 x 间隔 0.2 的加工坐标 (x, y) (右半部的数据)

0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
5	4.71	4.31	3.68	3.05	2.5	2.05
1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6
1.69	1.4	1.18	1	0.86	0.74	0.64
2.8	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4
0.57	0.5	0.44	0.4	0.36	0.32	0.29
4.2	4.4	4.6	4.8	5	4.8	4.6
0.26	0.24	0.2	0.15	0	-1.4	-1.96
4.4	4.2	4	3.8	3.6	3.4	3.2
-2.37	-2.71	-3	-3.25	-3.47	-3.67	-3.84
3	2.8	2.6	2.4	2.2	2	1.8
-4	-4.14	-4.27	-4.39	-4.49	-4.58	-4.66
1.6	1.4	1.2	1	0.8	0.6	0.4
-4.74	-4.8	-4.85	-4.9	-4.94	-4.96	-4.98
0.2	0					
-4.99	-5					

4 插值法的应用

加工零件的轮廓曲线：该问题是有一个待加工零件，它的外形根据工艺要求由一组数据 (x, y) 给出（在平面情况下），要求要用数控机床加工时刀具必须沿这些数据点前进，并且由于刀具每次只能沿 x 方向或 y 方向走非常小的一步，所以需要已知数据加密，得到加工所要求的步长很小的 (x, y) 坐标。

表1给出了轮廓线上 x 每间隔 0.2（长度单位）的加工坐标 x, y （顺时针方向为序，由轮廓线的左右对称性，表中只给出右半部的数据），假设需要得到 x 或 y 坐标每改变 0.05 时的坐标，试完成加工所需的加密数据，画出该零件的轮廓曲线。运用 matlab 绘画出的加工零件轮廓线，用不同的插值方法，画出最好的效果图。最后得出运用三次样条插值，画出的轮廓图最好。

5 结语

我们通过对函数插值的分析及研究，用解决实际问题的方法，对不同的插值方法都有了深刻的了解，并掌握了运用 matlab 解决插值问题，明白了各个插值方法的含义。这让我们不仅仅局限于理论知识的理解，

更上升到了实际问题中，加深了我们对于插值函数的认识。

参考文献：

- [1] 王凤玲, 陈庆林, 孙丽男. Lagrange、Newton、Hermite 插值法 MATLAB 算法比较研究及应用 [J]. 黑河学院学报, 2015, 06(06): 123-125.
- [2] 郭小乐. 基于 matlab 的常见插值法及其应用 [J]. 赤峰学院学报 (自然科学版), 2017(07): 5-7.
- [3] 董立华. 关于《数值分析》课程的教改实践 [J]. 德州学院学报, 2007, 23(06): 99-102.
- [4] 李洲洲, 魏媛, 郭晓斌. 模糊 Lagrange 插值及其误差分析 [J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(01): 58-65.
- [5] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析 (第四版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [6] 宋益荣, 万冬梅. 四种插值法的特点比较 [J]. 商丘职业技术学院学报, 2013, 12(02): 9-11.
- [7] 周建杰, 禹仁贵. 基于 MATLAB 软件的牛顿插值法理论研究 [J]. 河南科技, 2018(32): 10-12.