承压水水位预测模型的建立及其应用检验

赵肖芒[1]，王　瑶[2]，段柏山[3]

（1. 湖南中核勘探公司，湖南 长沙 410000；
2. 江西省大气污染成因与控制重点实验室，江西 南昌 330013；
2. 东华理工大学地球科学学院，江西 南昌 330013；
3. 新疆中核天山铀业有限公司，新疆 伊宁 835000）

摘　要　本文基于灰色系统理论建立了承压水水位埋深预测模型，实现地浸采铀过程中抽注平衡的目的。文章利用 GM(1,1) 的白化模型计算了预测承压水水位埋深的具体修正参数来进行水位预测；对比预测结果与实测数据发现两者数值相似且具有一致变化趋势，说明模型修正准确。同时本文通过检验对该模型进行评价，其预测精度高达 99.678%，说明该模型建立成功且有着实际应用意义。本文所建立的 GM(1,1) 模型可适用于具有灰色特征的承压水水位埋深等原始数据序列的模拟控制和预测分析，并提供地浸采铀行为对地下水动力场的影响和改变的预测依据。

关键词　灰色理论；GM(1,1)模型；水位埋深；预测

中图分类号：TD1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-0745(2023)02-0004-04

地浸采铀是利用人工钻孔将溶浸剂注入含矿含水层后，将含铀的浸出液通过抽液钻孔抽出地表进行加工处理的方法[1]。溶浸范围的圈定是抽注作业前的关键问题，决定着铀矿是否浸出完全及整个采区地下水流状态，而含矿含水层内的承压水水位埋深作为主要参考依据，其数据的系统规范一直是行业难题。因此，本文利用灰色系统理论，建立了一个预测模型，以期能够解决该难题。

灰色系统理论是对“部分”已知信息进行分析研究，包括对客观事物的量化、建模、预测、决策、控制等；从而进一步排除干扰噪声，提取有价值信息，对运行规律进行准确描述和精准控制[2]。这一理论能够将离散数据转换成信息完全、时间连续的动态模型，目前已形成以灰色模型 GM（Grey model）为核心的模型体系，以灰色关联空间为基础的分析体系，以灰色过程为基础和以生成空间为内涵的方法体系[3-4]。根据数据处理方法的不同，主要分为预测模型 GM(h,1)、状态分析模型 GM(1,n) 和静态分析模型 GM(0,n)，不同模型有着不同的适用范围。其中 GM(1,1) 模型作为一阶单变量模型，可通过对象自身的时间序列进行预测，适用于小样本的规律序列[5]，是最为活跃的模型之一，已被广泛应用于地下水位预测[6]、地裂差异沉降量、未来水质预测等各个领域，并成功解决了大量实际问题。

本文中承压水位埋深是各种影响因子综合作用的结果，符合灰因白果定律，故地下水水位埋深预测属于灰色系统理论研究范畴，可通过建立地下承压水灰色系统模型来更加科学地预测地下水埋深。运用伊犁某采区 SK26-1 观测井 2016 年 4 月 -2017 年 3 月的实测承压水位的原始埋深数据作为原始序列生成的原始数据模型，通过白化后的 GM(1,1) 模型来求解地下水的埋深，从而能够准确预判整个采区地下水动力场的变化情况，及时更改抽注流量，从而达到控制溶浸范围，保持抽注平衡的目的，并为地浸采铀矿山中的地下水埋深预测提供新的解决思路。

1 灰色模型概述

灰色系统理论是我国华中科技大学邓聚龙教授于 19 世纪 80 年代初创立并发展的理论，它把一般信息论、控制论和系统论的方法和观点延伸至社会、经济、生态等系统，与数学方法结合起来发展出一套解决灰色系统理论方法。灰色理论系统认为，一个系统如果受到多重外界环境及复杂内部因素影响（灰因）则属于不确定系统的发展演化；对于不确定系统的趋势预测，无法建立明确因变量和自变量的函数模型。但在诸多因素的共同作用下，待预测结果仍然是明确的（白果），即，待预测结果是该系统复杂内因外因共同作用下的最终表现形式，体现着所有影响因素在该系统内的发

展演变趋势。20 多年来，GM 模型已被广泛应用于社会各领域，该模型利用“生成”法将不确定因素处理转化为存在一定规律性的新数列，做到亮化信息从而快速建模；再通过对建立模型的逆生成，得到原始数据的分析模型。作为 GM 模型的基础和核心，GM(1,N) 表示 1 阶的、N 个变量的微分方程型模型，而 GM(1,1)，表示 1 阶，1 个变量的微分方程模型。

2 GM(1,1) 模型

2.1 GM(1,1) 模型的定义型

根据灰色系统理论，对于原始序列 $x_0(k)=[x_0(1),x_0(2),\cdots,x_0(n)]$，灰色 GM(1,1) 模型的定义型为：

$$x_0(k)+az_1(k)=b \tag{1}$$

灰微分方程建立过程可表示为：

$$\xrightarrow{x_0(k)} AGO \xrightarrow{x_1(k)} MEAN \xrightarrow{z_1(k)} GM(1,1)$$

其中，$x_1(k)$ 是原始序列 $x_0(k)$ 的一次累加（AGO）即 $x_1(k)=\sum_{m=1}^{k}x_0(m)$，表明模型以生成数 x_1 为基础；$z_1(k)$ 的序列称为白化背景序列，即：

$$z_1(k)=\frac{1}{2}x_1(k)+\frac{1}{2}x_1(k-1) \tag{2}$$

2.2 GM(1,1) 的白化模型

灰色模型 GM(1,1) 的白化模型为：

$$\frac{dx_1}{dt}+ax_1=b \tag{3}$$

式中：a 为发展系数，其大小和符号反映了原始序列 $x_0(k)$ 和其 AGO（累加）生成序列 $x_1(k)$ 过程中的发展态势；b 为灰作用量，它是从背景值挖掘出来的数据，反映了数据变化的关系，不是可以直接观测的，其确切内涵是灰的，是内涵外延化的具体体现，需要通过上述微分方程（公式）计算得到。

对于原始序列 $x_0(k)=[x_0(1),x_0(2),\cdots,x_0(n)]$ 及其 AGO（累加）序列 $x_1(k)=[x_1(1),x_1(2),\cdots,x_1(n)]$，GM(1,1) 白化模型的响应式分别为：

$$\hat{x}_1(k+1)=\left[x_0(1)-\frac{b}{a}\right]e^{-ak}+\frac{b}{a} \tag{4}$$

$$\hat{x}_0(k+1)=x_1(k+1)-x_1(k) \tag{5}$$

其中，$\hat{x}_0(k+1)$ 为灰色动态 1 阶模型 GM(1,1) 预测序列。

2.3 GM(1,1) 模型的参数识别

令 $k=2,3,\cdots,n$ 分别代入 GM(1,1) 模型的定义型 $x_0(k)+az_1(k)=b$ 中，可以得到如下方程组：

$$x_0(2)+az_1(2)=b \tag{6}$$

$$x_0(3)+az_1(3)=b \tag{7}$$

$$\vdots$$

$$x_0(n)+az_1(n)=b \tag{8}$$

上面的方程组可变换成如下矩阵方程：

$$\begin{vmatrix} x_0(2) \\ x_0(3) \\ \vdots \\ x_0(n) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -z_1(2) & 1 \\ -z_1(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z_1(n) & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \tag{9}$$

令：

$$B=\begin{vmatrix} -z_1(2) & 1 \\ -z_1(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z_1(n) & 1 \end{vmatrix} \qquad y_N=\begin{vmatrix} x_0(2) \\ x_0(3) \\ \vdots \\ x_0(n) \end{vmatrix} \tag{10}$$

根据最小二乘法，得到矩阵算式为：

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}=\left(B^TB\right)^{-1}B^Ty_N \tag{11}$$

令：

$$C=\sum_{k=2}^{n}z_1(k)，\quad D=\sum_{k=2}^{n}x_0(k)，$$

$$E=\sum_{k=2}^{n}z_1(k)x_0(k)，\quad F=\sum_{k=2}^{n}\left[z_1(k)\right]^2$$

则可得下列矩阵方程：

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{CD-(n-1)E}{(n-1)F-C^2} \\ \dfrac{DF-CE}{(n-1)F-C^2} \end{vmatrix} \tag{12}$$

由矩阵方程可知：

$$a=\frac{CD-(n-1)E}{(n-1)F-C^2}，\quad b=\frac{DF-CE}{(n-1)F-C^2} \tag{13}$$

根据以上公式可以对 $x_0(k)$ 进行推测，然后再进行残差检验和后验差检验，以获得已建立模型的预测精度及等级。

3 GM(1,1) 模型应用

下面以某矿床水文调查区水文观测孔（SK26–1）水位埋深数据为实例进行具体分析，用来判定模型是否适用，并对预测结果（模拟值）进行精度检验。

3.1 建立原始数列

以 SK26–1 水文观测孔实测承压水水位埋深数据（表 1）作为原始序列，则 $x_0=[x_0(k),x_0(k),\cdots,x_0(k)](k=1,2,3,\cdots,12)=$（173.77，171.95，170.45，169.60，169.80，170.30，

表 1 SK26-1 水文观测孔实测承压水水位埋深数据

年份	2016 年									2017 年		
月份	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
水位埋深观测值 /m	173.77	171.95	170.45	169.60	169.80	170.30	172.50	172.84	163.43	164.63	167.64	168.73

表 2 水文观测孔 (SK26-1) 承压水 GM(1,1) 模型参数计算表

年份	2016 年									2017 年		
月份	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
$x_0(k)$	173.77	171.95	170.45	169.6	169.8	170.3	172.5	172.84	163.43	164.63	167.64	168.73
$\hat{x}_1(k+1)$	173.77	345.58	516.92	687.78	858.17	1028.1	1197.5	1366.5	1535	1703.1	1870.7	2037.8
$\hat{x}_0(k+1)$	173.77	172.09	170.68	169.92	170.21	170.81	173.1	173.54	164.2	165.47	168.58	169.77
$e_0(k)$	0.000	−0.001	−0.001	−0.002	−0.002	−0.003	−0.003	−0.004	−0.005	−0.005	−0.006	−0.006
$\hat{x}_0(k+1)-x_0(k)$	0.00	0.14	0.23	0.32	0.41	0.51	0.60	0.70	0.77	0.84	0.94	1.04
$e_0(avg)(\%)$	0.322											
$P_0(\%)$	99.678											

172.50，172.84，163.43，164.63，167.64，168.73）。

3.2 原始数列的级比检验

灰色建模有严格的条件，在原始序列给出后，必须进行级比和级比界区判断，只有原始序列的级比在级比可容区和级比界区内，对原始序列进行 GM(1,1) 建模才是可行的。原始序列的级比计算公式为：

$$\sigma_1(k)=\frac{x_0(k-1)}{x_0(k)}(k=2,3,\cdots,12) \tag{14}$$

其计算结果为：

$\sigma_1(k)=\frac{x_0(k-1)}{x_0(k)}$=(1.0106，1.0088，1.0050，0.9988，0.9971，0.9872，0.9980，1.0576，0.9927，0.9821，0.9936)，(k=2，3，⋯，12)。上述结果表明，级比 $\sigma_1(k)$ 均在可容区 (e^{-2}，e^{2})=(0.1353，7.3891) 范围内。说明原始序列的数据是平滑的，能够作为参考数据进行灰预测。

3.3 灰生成

3.3.1 AGO（累加）生成

为降低原始数据的不稳定性（波动性），加强其规律性，对原始序列作一次累加，生成 (AGO) 后得到序列函数：

$$x_1(k)=\left[x_1(1),x_1(2),\cdots,x_1(n)\right] \tag{15}$$

其中：

$x_1(k)=\sum_{m=1}^{k}x_0(m)\ (k=1,2,\cdots,12)$=(173.77，343.90，511.35，678.40，849.00，1021.80，1207.50，1382.72，1470.90，1646.32，1844.03，2024.70)。

3.3.2 MEAN（均值）生成

根据灰色理论 $z_1(k)$ 的计算公式，可以计算出其 MEAN（均值）。经过计算可以得 MEAN（均值）=$z_1(k)$=(258.83，427.63，594.88，763.70，935.40，1114.65，1295.11，1426.81，1558.60，1745.16，1934.36)。

3.4 模型参数 a 和 b 的计算

根据中间参数（C、D、E、F）、发展系数 a 及灰作用量 b 的计算公式，结合 Matlab 科学计算软件分别计算出 C、D、E、F、a、b。计算过程及结果如下：

$$C=X0(1)-\frac{b}{a}=12055.13 \tag{16}$$

$$D=\sum_{k=2}^{n}x_0(k)=1861.87 \tag{17}$$

$$E=\sum_{k=2}^{n}z_1(k)x_0(k)=2032099.41 \tag{18}$$

$$F=\sum_{k=2}^{n}\left[z_1(k)\right]^2=16234092.07 \tag{19}$$

3.5 建立GM(1,1)模型和响应式

由原始序列（表1）可知：$x_0(1)=173.77$，则：

$$x_0(1)-\frac{b}{a}=-62111.52593 \quad (20)$$

$$\frac{b}{a}=62285.29593 \quad (21)$$

由此可以得到GM(1,1)模型的定义型和白化响应式：

$$x_0(k)+0.00277z_1(k)=172.29221 \quad (22)$$

$$\hat{x}_1(k+1)=-62111.52593e^{-0.00277k}+62285.29593 \quad (23)$$

由于$\hat{x}_0(k+1)=x_1(k+1)-x_1(k)$，根据GM(1,1)模型的定义型和白化响应式可以计算出$\hat{x}_0(k+1)$和$\hat{x}_1(k+1)$，计算结果见表2，地下水实测值所示，拟合度达99.678%。

3.6 结果检验

3.6.1 残差检验

相对残差为：

$$e_0(k)=\frac{x_0(k)-\hat{x}_0(k)}{x_0(k)}\times100\%\subseteq(-0.006,0) \quad (24)$$

平均残差为：

$$e_0(avg)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|e_0(k)\right|=0.322\% \quad (25)$$

精度为：

$$P_0=\left[100-e_0(avg)\right]\%=99.678\% \quad (26)$$

系统模型的平均残差只有0.322%，对比预测值与实测值，发现两者十分接近（最大误差为1.04m，最小误差为0.14m）；可明显看出，预测值曲线在实测值曲线附近有小幅波动，两条曲线光滑且拟合良好，该模型预测精度高达99.678%，拟合度及可信度较高。

3.6.2 后验差检验

原始数据均值为：

$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}x_0(k)=169.64 \quad (27)$$

残差均值为：

$$\overline{e}=\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}e_0(k)=-0.02683 \quad (28)$$

原始数据方差为：

$$S_1^2=\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}\left|x_0(k)-\overline{x}\right|^2=9.1969 \quad (29)$$

残差数据方差为：

$$S_2^2=\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}=\left|e_0(k)-\overline{e}\right|^2=0.000501 \quad (30)$$

后验差比值为：

$$C=\frac{S_2}{S_1}=0.0000545 \quad (31)$$

小误差概率为：

$$P=\left\{\left|e_0(k)-\overline{e}\le0.6745S_1\right|\right\} \quad (32)$$

当$S_1=3.0326$时，$0.6745S_1=2.0455$，计算可得$\left|e_0(k)-\overline{e}\right|=$(0.0260，0.0255，0.0249，0.0244，0.0239，0.0233，0.0228，0.0221，0.0217，0.0212，0.0206)均小于2.0455，误差概率$P=\left\{\left|e_0(k)-\overline{e}\le0.6745S_1\right|\right\}=1>0.95$，$C=0.0000545<0.35$，对比灰色动态模型精度等级参照表的精度（99.678%>95.000%）等级较高，属于Ⅰ级。

4 结论

为准确预测伊犁某地浸采铀矿区承压水水位埋深，控制溶浸范围，达到抽注平衡，本文应用了灰色系统理论的数学原理及GM(1,1)模型建立原始数列，利用灰生成降低数据波动性，预测结果与实测数据近似且有一致的变化趋势。

与此同时，通过“残差检验法”和“后验差检验法”检验GM(1,1)模型的预测精度。检验结果表明，GM(1,1)模型对于实验样本预测精度高达99.678%，属于Ⅰ级灰色动态模型预测精度，适用于具有灰色特征的砂岩型铀矿床承压水埋深等原始序列的模拟控制和预测分析，可以为地浸采铀矿山实际生产中含矿含水层的承压水位进行准确预测。

参考文献：

[1] 常云霞.地浸采铀井场溶浸范围的地下水动力学控制模拟研究[D].衡阳:南华大学,2020.
[2] 同[1].
[3] 邓聚龙.灰色系统基本方法[M].武汉:华中科技大学出版社,1987.
[4] 刘思峰.灰色系统理论及其应用[M].北京:科学出版社,2010.
[5] 郭杨.基于GM(1,1)模型的河流水质主要指标预测研究[J].农业与技术,2022,42(19):116-120.
[6] 刘洪,孙国曦,曹瑞祥.GM(1,1)模型预测地下水位时间序列应用研究[J].地质学刊,2009,33(01):51-54.