畸形波在有限水深中的演化和时频能量研究

罗春莲

（厦门海洋职业技术学院航海学院，福建 厦门 361012）

摘 要 本文基于 NLS 方程，研究呼吸子解畸形波在有限水深中的演化规律和时频能量特征。研究表明：在有限水深下，畸形波生成时，波高瞬间增大；畸形波消失时，波高瞬间减小，生成和消失具有快速性；时频能量谱显示畸形波生成时，能量集中程度随波高的增大而增大，畸形波消失时，能量集中程度随波高的减小而减小，但波浪能量始终集中在固定频率处。

关键词 畸形波；NLS 方程；呼吸子解；时频能量

中图分类号：P73 **文献标识码**：A **文章编号**：1007-0745（2023）02-0011-03

畸形波是一种具有大波高、能量高度集中的波浪[1]。发生时将严重破坏海洋结构物，严重威胁着人们的生命安全。科学家们开始致力于对畸形波的研究，并取得了丰硕的成果。Mori 等人[2]基于 YURA 港的波浪数据，分析得到畸形波波高与有义波高的最大比值约为 2.6；Sand 等人[3]基于北海的波浪数据，分析得到畸形波波高与有效波高的最大比值约为 2.9。

现阶段有关有限水深和深水畸形波的规律研究多从 B-F 不稳定性出发。Whitham[4]基于 B-F 不稳定性推导了守恒型方程，Chu 等人[5]修正了 Whitham 方程。Osborne 等人[6]基于三阶非线薛定谔方程研究畸形波，结果表明畸形波是以 B-F 不稳定性模式存在的。张运秋[7]改用 4 阶 NLS 方程，并基于伪谱法，对畸形波进行数值模拟，模拟了更大波陡的畸形波。

上述研究表明，三阶性薛定谔可较好地描述畸形波的演化过程。为更简便地对非线性方程进行研究，避免使用理论方法研究非线性方程的困难性[8]。本文主要通过数值求解 NLS 方程，探讨了畸形波生成前后的演化过程，揭示了畸形波的演化规律及频率规律。

1 NLS 方程

作为本文研究的理论背景，对三阶非线性薛定谔方程的推导作阐述[9]。

连续性条件：

$$\nabla^2\phi=0 \qquad -h(x,y)\le z\le\eta(x,y,t) \tag{1}$$

动力学边界条件：

$$-\frac{p_a}{\rho}=g\eta+\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla\phi\right|^2 \qquad z=\eta(x,y,t) \tag{2}$$

运动学边界条件：

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad z=\eta(x,y,t) \tag{3}$$

水底边界条件：

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} \qquad z=-h(x,y) \tag{4}$$

式中，$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$，$\phi$ 为速度势，h 为水深，x、y、z 为波浪传播的方向，t 为时间，η 为水面高，g 为 9.8，$u=\nabla\phi$。当压力 p_a 为定值时，式（2）、（3）可以统一为（5）：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial u^2}{\partial t}+\frac{1}{2}u\cdot\nabla\left(u^2\right)=0 \qquad z=\eta \tag{5}$$

有限水深条件，式（4）转化为以下形式：

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad z=-h \tag{6}$$

方程（4）和（5）依据泰勒级数展开，展开到三阶。

$$-g\eta=\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_0+\eta\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial z}\right]_0+\frac{1}{2}\left[u^2\right]_0+\frac{\eta^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\right]_0+\eta\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]+\dots \tag{7}$$

$$0=\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]_0+\eta\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]_0+\left[\frac{\partial}{\partial t}u^2\right]_0+\frac{\eta^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]_0+\eta\left[\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}u^2\right]+\left[u\cdot\nabla u^2\right]_0+\dots \tag{8}$$

引入尺度变量：

$$\begin{cases}x,x_1=\varepsilon x,x_2=\varepsilon^2x\dots\\ y,y_1=\varepsilon y,y_2=\varepsilon^2y\dots\\ t,t_1=\varepsilon t,t_2=\varepsilon^2t\dots\end{cases} \tag{9}$$

★基金项目：2020 年福建省教育厅中青年教师教育科研项目科技类（项目编号：JAT201163）。

ϕ 和 η 以 ε 的展开为：

$$\begin{cases} f=\sum_{n=1}\varepsilon f_n,\eta=\sum_{n=1}\varepsilon\eta_n \\ f_n=f_n(x,x_1,x_2,x_3\ldots;\ y,y_1,y_2,y_3\ldots\quad t,t_1,t_2,t_3\ldots) \\ \eta_n=\eta_n(x,x_1,x_2,x_3\ldots;\ y,y_1,y_2,y_3\ldots\quad t,t_1,t_2,t_3\ldots) \end{cases} \tag{10}$$

多尺度展开如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\to\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_2}\ldots \\ \frac{\partial}{\partial y}\to\frac{\partial}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial y_2}\ldots \\ \frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\ldots \\ \frac{\partial}{\partial z}\to\frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \tag{11}$$

将式（9）、（10）和（11）代入式（1）、（2）、（3）和（4）中，推导得式（12）和（13）。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+C_g\frac{\partial}{\partial x_1}\right)A+i\varepsilon\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial k^2}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}-\frac{C_g}{2k}\frac{\partial^2 A}{\partial y_1^2} \\ +\frac{wk^2\left(\cosh 4kh+8-2\tanh^2 kh\right)}{16\sinh^4 kh}|A|^2 A \\ -\left(\frac{k^2}{2w\cosh^2 kh}\frac{\partial f_{10}}{\partial t_1}-k\frac{\partial f_{10}}{\partial x_1}\right)A \end{bmatrix}=0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 f_{10}}{\partial t_1^2}-gh\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)f_{10}=\frac{w^3\cosh^2 kh}{2k\sinh^2 kh}\frac{\partial|A|^2}{\partial x_1}-\frac{w^2}{4\sinh^2 kh}\frac{\partial|A|^2}{\partial t_1} \tag{13}$$

其中，$|A|$ 为复波包，φ_{10} 为平均流势。

当 $\partial/\partial y_1=0$ 时，可得如下三阶非线性薛定谔方程（NLSE）：

$$-i\frac{\partial A}{\partial\tau}+\alpha\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}+\beta|A|^2 A=0 \tag{14}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial k^2}\right)=\frac{C_g^2}{2w}-\frac{wkh\cosh^2 kh}{k^2\sinh 2kh}+\frac{kh}{k}\frac{\sinh kh}{\cosh kh}C_g \tag{15}$$

$$\beta=\frac{wk^2(\cosh^4 kh+8-2\tanh^2 kh)}{16\sinh^4 kh}+\frac{w}{2\sinh^2 2kh}\frac{(2w\cosh^2 kh+kC_g)^2}{gh-C_g^2} \tag{16}$$

其中，$\xi=x_1-C_g t_1$，$\tau=\varepsilon t_1$，$C_g=\frac{\omega}{2k}\left(1+\frac{2kh}{\mathrm{sh}2kh}\right)$。

本文采用伪谱方法求解 NLS 方程，其中，伪谱法隐含了周期为 2π 的空域，周期性条件如下：

$$A(0,x)=A(2\pi,x) \tag{17}$$

$A(t,x)$ 的傅里叶变换及逆变换（$0<t<2\pi$）如下所示：

$$\hat{A}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}A(x)e^{-ikx}dx \tag{18}$$

$$A(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{A}(k)e^{ikx}dk \tag{19}$$

记 $\hat{A}(k)=F\left[A(x)\right]$ 和 $A(x)=F^{-1}\left[\hat{A}(k)\right]$，对于 $F\left[A'(x)\right]$，可得：

$$F\left[A'(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}A'(x)e^{-ikx}dx=A(x)e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}A(x)(-ik)e^{-ikx}dx \tag{20}$$

当 $|x|\to\infty$ 时，$u(x)\to 0$，则：

$$F\left[A'(x)\right]=ik\int_{-\infty}^{\infty}A(x)e^{-ikx}dx=ikF\left[A(x)\right] \tag{21}$$

类似地，可以得到：

$$F\left[A^{(n)}(x)\right]=(ik)^n F\left[A(x)\right] \tag{22}$$

对 NLS 方程做傅里叶变换，则方程中的线性项 $\alpha\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$ 变为 $-\frac{ik^2}{\alpha}\hat{A}$，并利用 $A=F^{-1}\left[\hat{A}\right]$、$\partial^n A/\partial x^n=F^{-1}\left[(ik)^n\hat{A}\right]$ 代换非线性项中的 A、$\partial^n A/\partial x^n$，可得 $\hat{A}(k,t)$ 的微分方程：

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}=-\frac{ik^2}{\alpha}\hat{A}+i\beta F\left[\left|F^{-1}(\hat{A})\right|^2F^{-1}(\hat{A})\right] \tag{23}$$

然后将 $\hat{A}$ 和 k 离散化，简化为离散化的常微分方程组，用时间步进法计算，初始条件为 $\hat{A}(k,t_0)=F\left[A(k,t_0)\right]$，接着做傅里叶逆变换 $A(x,t)=F^{-1}\left[A(k,t)\right]$，实现方程的求解。

2 呼吸子解畸形波演化的数值模拟

基于呼吸子解畸形波[10]（式24），对NLSE数值求解，研究畸形波在有限水深的演化过程。

$$A=A_0e^{-i\beta A_0^2 t_d}\left[\frac{4\alpha\left(1-2i\beta A_0^2 t_d\right)}{\left(\alpha+\alpha\left(2\beta A_0^2 t_d\right)^2+2\beta A_0^2\xi^2\right)}-1\right] \tag{24}$$

其中，t_d 表示无因次时间。

依据有限水深的定义：$0.05<\frac{h}{\lambda}=\frac{kh}{2\pi}<0.5$，取 k=1、h=2.5，求得 α 和 β，分别为 0.5965 和 0.926，分别取初始波幅为 0.1 和 0.3 的两个算例（算例 1 和算例 2）进行研究，模拟结果见图 1。

图 1 给出了 2 种算例下畸形波复波包绝对值在不

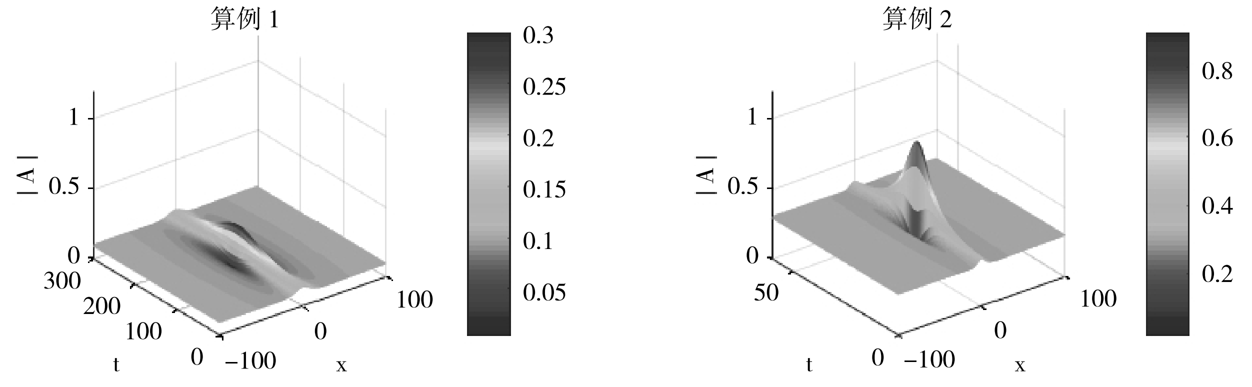

图 1 畸形波的复波包绝对值

同时刻的演化过程。研究表明：在有限水深下，畸形波生成时，波高瞬间增大；畸形波消失时，波高瞬间减小，生成和消失具有快速性；算例 1 中，初始波幅为 0.1 时，最大波幅约为 0.3，算例 2 中，初始波幅为 0.3 时，最大波高约为 0.9，2 个算例皆表面畸形波生成时刻，最大波幅约为平均波幅的 3 倍，这也与其他学者研究的相对应。

3 畸形波的时频能量研究

基于上述 2 种算例的数值模拟，结合小波变化，进一步研究畸形波从生成到消失过程中，开始位置（x_1=–100），聚焦位置（x_2=0），消散位置（x_3=100）的能量和频率变化。

算例 1 与算例 2 的能量特征分析表明：畸形波生成前（x_1=–100），能量较小，畸形波生成处（x_2=0），能量增大，畸形波消失处（x_3=100），能量减小；算例 2 的初始波幅是算例 1 的 3 倍，而算例 2 谱峰度最大值是算例 1 的 7 倍，这表明初始波幅越大，畸形波生成时的能量越大。

同时，算例 1 与算例 2 的时频特征分析表明：畸形波生成前（x_1=–100）、畸形波生成处（x_2=0）和畸形波消失处（x_3=100），波浪能量始终集中在 f=0.5Hz 处，频率无变化。

4 结语

1. 本文基于伪谱法，通过傅里叶变换和逆变换，将非线性 NLS 方程简化为离散化的常微分方程组，实现方程的求解，并进一步研究呼吸子解畸形波在有限水深中的演化规律和时频能量特征。

2. 研究表明：在有限水深下，畸形波生成时，波高瞬间增大；畸形波消失时，波高瞬间减小，生成和消失具有快速性；畸形波生成时刻，最大波幅约为平均波幅的 3 倍，时频能量谱显示能量集中程度随波高的增大而增大，畸形波消失时，能量集中程度随波高的减小而减小，但波浪能量始终集中在 f=0.5Hz 处，频率无变化。

参考文献：

[1] 张井喜 . 畸形波作用下新型浮式风机砰击压力预报方法研究 [D]. 镇江 : 江苏科技大学 ,2022.

[2] Mori N,Yasuda T,Nakayama S.Statistical properties of freak waves observed in the sea of Japan[C].Proc. of the 10th Internationl Offshore and Polar Engineering Conference, Seattle,USA,2000.

[3] Sand S E,Ottesen N E,Klinting P,et al.Water wave kinematics[M].Molde, Norway, Kluwer,1990.

[4] Whitham G B.Non−linear dispersion of water waves[J].Journal of Fluid Mechanics,2006,27(02):399−412.

[5] Chu V H,Mei C C.The nonlinear evolution of Stokes waves in deep water[J].Journal of Fluid Mechanics, 1971,47(04): 337−352.

[6] Osborne A R,Onorato M,Serio M.The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep water gravity wave trains[J].Physics Letter A,2000,275(05−06):386−393.

[7] 张运秋 . 深水畸形波的数值模拟研究 [D]. 大连 : 大连理工大学 , 2008.

[8] Benny D J,RoskesG J.Wave instability[J].Studies Appl. Math,1969(48):377−385.

[9] 刘应中 , 等编 . 摄动理论在船舶流体力学中的应用 [M]. 上海 : 上海交通大学出版社 ,1991.

[10] Peregrine D H.Water Waves,Nonlinear Schrödinger Equations and Their Solutions[J].The ANZIAM Journal, 1983,25(01):16−43.